

Geometrija 3, školska 2013/14
Rešenja roka jun 1

1. Data je kriva $\alpha(t) = (3t, 3t^2, 2t^3)$, $t \in \mathbb{R}$.

- (a) Odrediti normalnu, rektifikacionu i oskulaturnu ravan u tački krive u kojoj je krivina najveća.
- (b) Dokazati da je data kriva uopšteni heliks. Odrediti konstantan vektor v i konstantan ugao φ takve da kriva α zaklapa ugao φ sa pravcem v .

Rešenje. Data kriva se ne može eksplicitno parametrizovati prirodnim parametrom, pa ćemo krivinu, torziju i Freneov reper krive računati koristeći odgovarajuće formule za krivu parametrizovanu proizvoljnim parametrom:

$$\begin{aligned}\alpha'(t) &= 3(1, 2t, 2t^2), & \alpha''(t) &= 6(0, 1, 2t), & \alpha'''(t) &= (0, 0, 12), \\ \alpha'(t) \times \alpha''(t) &= 18(2t^2, -2t, 1), & [\alpha'(t), \alpha''(t), \alpha'''(t)] &= 216, \\ \|\alpha'(t)\| &= 3(1 + 2t^2), & \|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\| &= 18(2t^2 + 1), \\ \kappa(t) &= \frac{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3} = \frac{2}{3(1 + 2t^2)^2}, \\ \tau(t) &= \frac{[\alpha'(t), \alpha''(t), \alpha'''(t)]}{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|^2} = \frac{2}{3(1 + 2t^2)^2}.\end{aligned}$$

Krivina krive α dostiže najveću vrednost ako je $t = 0$, što znači da je tačka $\alpha(0) = (0, 0, 0)$ tačka u kojoj je krivina najveća. Freneov reper u ovoj tački čine vektori:

$$\begin{aligned}T(0) &= \frac{\alpha'(0)}{\|\alpha'(0)\|} = (1, 0, 0), \\ B(0) &= \frac{\alpha'(0) \times \alpha''(0)}{\|\alpha'(0) \times \alpha''(0)\|} = (0, 0, 1), \\ N(0) &= B(0) \times T(0) = (0, 1, 0).\end{aligned}$$

Normalna, rektifikaciona i oskulaturna ravan u tački $\alpha(0)$ date su redom formulama ($X = (x, y, z)$):

$$\langle X - \alpha(0), T(0) \rangle = 0, \quad \langle X - \alpha(0), N(0) \rangle = 0, \quad \langle X - \alpha(0), B(0) \rangle = 0,$$

a njihove jednačine su redom

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0,$$

tj. u pitanju su baš koordinatne ravni (redom Oyz , Oxz , Oxy).

Kako je $\frac{\kappa(t)}{\tau(t)} \equiv 1$, kriva je uopšteni heliks. Ako je v konstantan jedinični vektor i $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2})$ konstantan ugao koji kriva α zaklapa sa pravcem v , važi (pogledati vežbe)

$$v = \cos \varphi T + \sin \varphi B, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{\kappa}{\tau}.$$

Sada lako sledi da je $v = \frac{\sqrt{2}}{2}(1, 0, 1)$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$ (pravac vektora v je jedna od dve simetrale ugla između tangente i binormale krive α).

2. Neka je γ asimptotska linija na datoj površi.

- (a) Dokazati da se normala N krive γ do na znak poklapa sa unutrašnjom normalom S te krive na datoj površi, dok se normala n površi (duž krive γ) do na znak poklapa sa binormalom B krive γ .
- (b) Dokazati da važi $\text{II}(T, S) = \pm \tau$, gde je T tangentni vektor krive γ , τ njena torzija, a II druga fundamentalna forma date površi.

Rešenje. Neka je kriva γ prirodno parametrizovana bez umanjenja opštosti. Kako je γ asimptotska kriva, duž krive γ važi $\kappa_n \equiv 0$. Za vektor ubrzanja važi $\gamma'' = \kappa N = \kappa_g S + \kappa_n n$, pa je duž asimptotske linije zadovoljeno $\kappa N = \kappa_g S$ (i $\kappa_g = \pm \kappa$), odakle je $N = \pm S$.

Kako su $[T, N, B]$ i $[n, T, S]$ pokretni ortonormirani reperi (Freneov i Darbuov) duž krive γ na površi, važi $B = T \times N$, $S = n \times T$, pa iz prethodnog dela zadatka sledi odmah $n = \pm B$. U zadatku 30 na vežbama pokazano je da na svakoj krivoj na površi važi $\text{II}(T, S) = \langle S', n \rangle = -\langle S, n' \rangle$. Kako je $n' = \pm B' = \pm \tau N = \pm \tau S$, dobijamo i $\text{II}(T, S) = \pm \tau$.

3. Dat je paraboloid $z = x^2 + y^2$.

(a) Odrediti glavne krivine, Gausovu, srednju i normalnu krivinu, kao i tip svih tačaka na paraboloidu.

(b) Odrediti glavne i asimptotske pravce paraboloidea, kao i jednačine glavnih i asimptotskih linija.

Rešenje. Parametrizacija (dela) datog kružnog paraboloidea kao rotacione površi glasi

$$r(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u^2), \quad u > 0, \quad v \in (0, 2\pi).$$

U daljim računima možemo slobodno pretpostaviti da je $u \geq 0$ i $v \in [0, 2\pi]$. Koeficijenti prve i druge fundamentalne forme glase:

$$\begin{aligned} r_u &= (\cos v, \sin v, 2u), & r_v &= (-u \sin v, u \cos v, 0), \\ r_u \times r_v &= (-2u^2 \cos v, -2u^2 \sin v, u), & n &= \frac{1}{\sqrt{4u^2 + 1}}(-2u \cos v, -2u \sin v, 1), \\ r_{uu} &= (0, 0, 2), & r_{uv} &= (-\sin v, \cos v, 0), & r_{vv} &= (-u \cos v, -u \sin v, 0) \end{aligned}$$

$$[I] = \begin{pmatrix} 4u^2 + 1 & 0 \\ 0 & u^2 \end{pmatrix}, \quad [II] = \frac{1}{\sqrt{4u^2 + 1}} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2u^2 \end{pmatrix}.$$

Glavne krivine su sopstvene vrednosti matrice $[I]^{-1} \cdot [II] = \begin{pmatrix} \frac{2}{(\sqrt{4u^2+1})^3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{4u^2+1}} \end{pmatrix}$ i iznose $\kappa_1 = \frac{2}{(4u^2+1)^{\frac{3}{2}}}$,

$\kappa_2 = \frac{2}{\sqrt{4u^2+1}}$. Gausova krivina površi iznosi $K = \kappa_1 \kappa_2 = \frac{4}{(4u^2+1)^2}$, a srednja krivina $H = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} = \frac{4u^2+2}{(4u^2+1)^{\frac{3}{2}}}$.

Kako je $K > 0$, sve tačke na paraboloidu su eliptičke. Za $u = 0$ imamo $\kappa_1 = \kappa_2$, pa je tačka $(0, 0, 0)$ na paraboloidu specijalno i umbilička.

Neka je v_p proizvoljni pravac u proizvoljnoj tački p paraboloidea. Ako uzmemo da je v_p specijalno jedinični, možemo ga predstaviti u bazi $[e_1, e_2]$ jediničnih glavnih pravaca tangentne ravni kao $v_p = \cos \theta e_1 + \sin \theta e_2$, gde je $\theta \in [-\pi, \pi]$ usmereni ugao između glavnog pravca e_1 i v_p . Na osnovu Ojlerove teoreme imamo da je normalna krivina površi u tački p i pravcu v_p jednaka

$$\kappa_n(v_p) = \cos^2 \theta \kappa_1 + \sin^2 \theta \kappa_2 = \frac{2(\cos^2 \theta + (4u^2 + 1) \sin^2 \theta)}{(4u^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}.$$

Ako predstavimo vektor $v_p = ar_u + br_v$ ($(a, b) \neq (0, 0)$) u bazi $[r_u, r_v]$ tangentne ravni (tada nam nije neophodno da bude jedinični), imamo da je normalna krivina jednaka

$$\kappa_n(v_p) = \frac{II(v_p, v_p)}{I(v_p, v_p)} = \frac{a^2 e + 2abf + b^2 g}{a^2 E + 2abF + b^2 G} = \frac{2(a^2 + b^2 u^2)}{a^2(4u^2 + 1) + b^2}.$$

Glavni pravci su sopstveni vektori matrice $\begin{pmatrix} \frac{2}{(4u^2+1)^{\frac{3}{2}}} & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{4u^2+1}} \end{pmatrix}$ i iznose $e_1 = (1, 0) = r_u$, $e_2 = (0, 1) = r_v$

(do na množenje skalarom, pa se može postići i da budu jedinični ako je potrebno). Naravno, ovo smo mogli zaključiti odmah zbog $F = f = 0$. U tački $(0, 0, 0)$ svi pravci tangentne ravni $z = 0$ su glavni pravci.

Za asimptotske pravce važi $II(v_p, v_p) = 0$, odnosno $a^2 e + 2abf + b^2 g = 0$. Zamenom konkretnih vrednosti vidimo da ova jednačina nema rešenja po a, b zbog $f = 0$ i $e > 0$, $g \geq 0$, pa asimptotski pravci ne postoje ni u jednoj tački paraboloidea. Ovo smo takođe mogli zaključiti i na osnovu činjenice da su sve tačke na paraboloidu eliptičke.

Glavne linije $r(u(t), v(t))$ se dobijaju kao rešenja diferencijalne jednačine

$$\begin{vmatrix} -v'^2 & u'v' & -u'^2 \\ E & F & G \\ e & f & g \end{vmatrix} = 0.$$

Kako je $F = f = 0$, ova jednačina se svodi na $(Eg - eG)u'v' = 0$, odnosno $u' = 0$ ili $v' = 0$, pa su rešenja krive $u = \text{const}$, $v = \text{const}$, tj. koordinatne linije. Primetimo da je $Eg = eG$ jedino u umbiličkoj tački $(0, 0, 0)$, što je jedna izolovana tačka koja nije "problematična" pri rešavanju ove jednačine.

Asimptotske linije $r(u(t), v(t))$ su rešenja diferencijalne jednačine $eu'^2 + 2fu'v' + gv'^2 = 0$. Kako je $f = 0$ i $e > 0$, $g \geq 0$, ova jednačina nema rešenja, tj. ne postoje asimptotske linije na datom paraboloidu (što smo mogli da zaključimo i na osnovu činjenice da ne postoje asimptotski pravci).

4. Data je površ $r(u, v) = (u - \sin u, 1 - \cos u, v)$, $u \in (0, 2\pi)$, $v \in \mathbb{R}$.

(a) Dokazati da je data površ izometrična (delu) ravni.

(b) Dokazati da se skup svih geodezijskih linija na datoj površi sastoji od koordinatnih linija i krivih oblika

$$v = C \cos \frac{u}{2} + D, \quad C, D = \text{const}, \quad C \neq 0.$$

Rešenje. Data površ je cilindar nad ravanskom krivom $\alpha(u) = (u - \sin u, 1 - \cos u)$ ($u \in (0, 2\pi)$) koja je deo cikloide, sa izvodnicama paralelnim z -osi. Dokazaćemo da je izometrična delu ravni $x = 0$ (parametrizovanoj sa $f(y, z) = (0, y, z)$) tako što ćemo cilindar "razviti" na tu ravan. Funkcija dužine luka krive α je

$$s(u) = \int_0^u \sqrt{2 - 2 \cos z} dz = -4 \cos \frac{z}{2} \Big|_0^u = 8 \sin^2 \frac{u}{4}.$$

Pri tom razvijanju tačka $r(u, v)$ na površi r ostaje na istom rastojanju od z -ose kao i tačka $f(y, z)$ na površi f , pa je zato izometrija data formulama

$$y = 8 \sin^2 \frac{u}{4}, \quad z = v.$$

Zaista, površi

$$r(u, v) = (u - \sin u, 1 - \cos u, v), \quad u \in (0, 2\pi), \quad v \in \mathbb{R},$$

$$f(u, v) = (0, 8 \sin^2 \frac{u}{4}, v), \quad u \in (0, 2\pi), \quad v \in \mathbb{R},$$

imaju iste koeficijente prve forme date matricom $\begin{pmatrix} 2 - 2 \cos u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Kako se geodezijske linije čuvaju pri izometrijama, možemo geodezijske na površi r odrediti kao slike geodezijskih na površi f . Geodezijske linije u ravni f su prave $z = \text{const}$, $y = \text{const}$, $z = \tilde{C}y + \tilde{D}$, $\tilde{C}, \tilde{D} = \text{const}$, $\tilde{C} \neq 0$. Iz formula izometrije sada lako sledi da su geodezijske na površi r sve koordinatne linije, kao i krive

$$v = 8\tilde{C} \sin^2 \frac{u}{4} + \tilde{D}, \quad \tilde{C}, \tilde{D} = \text{const}, \quad \tilde{C} \neq 0.$$

Nakon smena $C = -4\tilde{C}$, $D = 4\tilde{C} + \tilde{D}$, dobijamo traženi oblik geodezijskih linija. Kako koeficijenti prve forme površi r zavise samo od parametra u i važi $F = 0$, geodezijske linije mogu se odrediti i na način opisan u rešenju zadatka 21 sa vežbi (samo je Kristofelov simbol $\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2} \text{ctg} \frac{u}{2}$ različit od nule).

Napomena. Na ispitu je potrebno dokazati sva tvrđenja sa vežbi na koja se pozivate, osim gotovih formula.